Title	Überdechung ノーツノ Dualitätssatz ニ就テノ注意
Author(s)	山内, 省三
Citation	全国紙上数学談話会. 156 p.130-p.139
Issue Date	1938-03-17
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74617
rights	
Note	

691. Überdeckung ノ一ツノDualitätssatz ニ就テノ注意

山内　肖三

§1. Komplex ノ Überdeckung[1] ニ於ケル Bettische Gruppe ノ定義ハスベテ小松氏ノソレ[2]ニ依ルコトニスル。

即チ Komplex K_i ノ Überdeckung ヲ U_i、ソレニ對シテ定義サレタ k-dim. 0-Bettische Gruppe 及ビ u-Bettische Gruppe ヲ夫々 ${}_iB_0^k(K_i, \mathfrak{A})$, ${}_iB_u^k(K_i, \mathfrak{A})$ トス。

<u>Lemma.</u> Komplex K_m ガ K_n ニ (auf) Simplizial abbilden サレルトキハ ${}_nB_0^k(K_n, \mathfrak{A})$ ハ ${}_mB_0^k(K_m, \mathfrak{A})$ ニ homomorph ニ (in) abbilden サレル。

証明.[3]

---

1) K. Reidemeister: überdeckungen von Komplexen. Crelle Journal 173

2) A. Komatu: über die Dualitätssätze der Überdeckungen Jap. Journal of Math. (1936)

3) A. Komatu:
Über die Ringdualität eines Kompaktums
TÔHOKU. Math. Journal vol. 43 (1937)

証明. Simplizialer Abbildung ヲ $\varphi_n^m(K_m)=K_n$ トス。

${}_mf^k \in {}_nF^k(K_m,\mathfrak{A})$ ヲ ${}_nf^k \in {}_nF^k(K_n,\mathfrak{A})$ ＝對應セラレタ Kette トス。

$${}_mf^k({}_ma_i^k) = {}_nf^k(\varphi_n^m({}_ma_i^k)) \qquad (1)$$

但シ Kette ${}_mf^k$ ＝對シテハ $\dim \varphi_n^m({}_ma_i^k) < k$ ノトキハ ${}_mf^k = 0$ トス。

今 ${}_nf^k$ ヲ oberer Zyklus トス。

$$g_0\,{}_nf^k = {}_nf^{k+1}({}_na_j^{k+1}) = \sum_{{}_na_j^{k+1}\to {}_na_i^k} {}_n\varepsilon_{ji}^k\, {}_n\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}\, {}_nf^k({}_na_i^k) = 0 \qquad \text{-----}(2)$$

一方 $g_0\,{}_mf^k = {}_mf^{k+1}({}_ma_j^{k+1}) - \sum_{{}_ma_j^{k+1}\to {}_ma_i^k} {}_m\varepsilon_{ji}^k\, {}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}\, {}_mf^k({}_ma_i^k)$

$$= \sum_{{}_ma_j^{k+1}\to {}_ma_i^k} {}_m\varepsilon_{ji}^k\, {}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}\, {}_nf^k(\varphi_n^m({}_ma_i^k)) \qquad \text{-----}(3)$$

所デ U_m, U_n ノ Ingidenzmatrizen ノ間＝ハ次ノ関係ガアル。[4)]

$${}_m\varepsilon_{ji}^k\, {}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1} = {}_m\varepsilon_{ji}^k\, {}_n\bar{\gamma}_{ij}^{k+1} \qquad (4)$$

(4) ト (2) ヨリ (3) ノ右辺 ＝ 0

---

4) 小松氏. 紙上談話會 10可.

(4) ナル関係式ハ ${}_m\varepsilon_{ij}^{k+1}\, {}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1} = {}_n\varepsilon_{ij}^{k+1}\, {}_n\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}$ ＝同ジ.

又 ${}_n f^k$ ガ o-Rand ナラ $(k-1)$-dim. Kette ガ存在シテ $g_0\, {}_n f^{k-1} = {}_n f^k$

$$\therefore\ g_0\, {}_n f^{k-1} = {}_n f^k({}_n a_i^k) - \sum_{{}_n a_i^k \to {}_n a_j^{k-1}} {}_n\varepsilon_{ij}^{k-1}\, {}_n\bar{\eta}_{ji}^{k}\, {}_n f^{k-1}({}_n a_j^{k-1}) \cdots (5)$$

今 ${}_n f^k$ ニ對應セル Kette ヲ ${}_m f^k$ トスレバ (5), (4), (1) ヨリ ${}_m f^k$ モ亦 o-Rand ニナル。

即 ${}_m f^k = {}_n f^k\left(g_n^m({}_m a_i^k)\right)$

$$= \sum_{{}_n a_i^k \to {}_n a_j^{k-1}} {}_n\varepsilon_{ij}^{k-1}\, {}_n\bar{\eta}_{ji}^{k}\, {}_n f^{k-1}\left(g_n^m({}_m a_j^{k-1})\right) = g_0\, {}_n f^{k-1}$$

コノ對應ハ明ニ Hommorphismus

故ニ ${}_n B_0^k(K_n, \mathfrak{A}) \xrightarrow{\text{homomorph in}} {}_m B_0^k(K_m, \mathfrak{A})$

§2. Kompaktum $F^n \subset R^n$:

F^n, Projektionsspektrum

(1) $K_1, K_2 \overset{\leftarrow}{\cdots\cdots}, K_m, K_{m+1}, \cdots\cdots$ $g_n^m(K_m) = K_n$

$\dim. K_m = n$

Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ ヲ Koordinaten-gruppe ニトル。

(1) ノ Überdeckungsfolge ヲ

(2) $U_1, U_2, \overset{\leftarrow}{\cdots\cdots} U_m, U_{m+1}, \cdots\cdots$

U_1 ノ Inzidenzmatrizen ヲ決定シタ後ノ U_i $(i>1)$ ノ Inzizenzmatrizen ノ決定ハ小松氏：紙上談話會 107 ニ依ル。

Lemma 1 ヨリ

$$(3)\quad {}_1B_0^k(K_1,\mathfrak{a}) \to {}_2B_0^k(K_2,\mathfrak{a}) \to \cdots\cdots \to {}_mB_0^k(K_m,\mathfrak{a}) \to \cdots$$

Folge (3) ノ Limesgruppe ヲ $B_0^k(F,\mathfrak{a})$:

ツマリ Komplexenfolge (2) ノ Limesraum ヲ Kompaktum F ノ überdeckung ト $\mathfrak{U}$ ト定義スルトキ $\mathfrak{U}$ ニツイテ F ニ關シテ定義サレタ k-dim ober Bettische Gruppe ガ $B_0^k(F,\mathfrak{a})$ デアル。

Lemma 2.

n-dim. Zellen Komplex K ノ duale. Sternkomplex ヲ K^* トスレバ

$$B_0^r(K,\mathfrak{a}) \approx B_u^{n-r}(K^*,\mathfrak{a})$$ [5)]

Folge (1) ノ duale sternkomplexenfolge ヲ

$$(4)\quad K_1^*,\ K_2^*,\ \underset{\longrightarrow\varphi^*}{\cdots\cdots},\ K_m^*,\ K_{m+1}^*,\cdots\cdots$$

トスルト

$$(5)\quad {}_1B_u^{n-k}(K_1^*,\mathfrak{a}) \to \cdots\cdots \to {}_mB_u^{n-k}(K_m^*,\mathfrak{a}) \to \cdots\cdots$$

ココニ ${}_iB_0^k(K_i,\mathfrak{a}) \approx {}_iB_u^{n-k}(K_i^*,\mathfrak{a}) \qquad i=1,2,\cdots\cdots$

---

5) A. Komatu: Über die Dualitätssätze der überdeckungen.

コヽニ ${}_{n}B_{u}^{n-k}(K_n^*, \mathfrak{a}) \to {}_{m}B_{u}^{n-k}(K_m^*, \mathfrak{a})$ ヘノ對應ハ次ノヤウニ考ヘル。($n < m$)

先ヅ $K_n \xleftarrow{g} K_m$ $n < m$ $g_n^m(K_m) = K_n$ ニ於テ

$$ {}_{n}a_j^k \in K_n \text{ ニ abbilden サレル } K_m \text{ ノ Elementen ヲ } \begin{cases} {}_{m}a_{i_1}^k \\ {}_{m}a_{i_2}^k \\ \vdots \\ {}_{m}a_{i_s}^k \end{cases} $$

トス。(§1, (1) ヨリワカル様ニ同次元ノモノダケ考ヘテオケバヨイ)

即チ $g_n^m({}_{m}a_{i_t}^k) = {}_{n}a_j^k \qquad t = 1, 2, \cdots\cdots s$

dual Operator ヲ $\mathcal{H}$ トス.

ソノ意味ハ

$$ \left. \begin{aligned} \mathcal{H}\,{}_{n}a_j^k &= {}_{n}b_j^{n-k} \\ \mathcal{H}\,{}_{m}a_{i_t}^k &= {}_{m}b_{i_t}^{n-k} \\ \mathcal{H} f^k &= f^{*\,n-k} \end{aligned} \right\} $$

$b^{n-k} \in K^*$ ハ $a^k \subset K$ ニ一對一ニ對應スル Element

f^{*n-k} ハ K^* ノ Element b^{n-k} ニ關シテ定義サレル Kette.

Inzidenzrelation ニ就イテハ

$$K: \quad \varepsilon_{ij}^{k}(a_i^k, a_j^{k-1})$$
$$K^*: \quad \overset{*}{\varepsilon}{}_{ji}^{n-k+1}(\mathcal{X}a_i^k, \mathcal{X}a_j^{k-1}) = \overset{*}{\varepsilon}{}_{ji}^{n-k+1}(b_i^{n-k}, b_j^{n-k+1})$$
$$\left.\right\} \varepsilon_{ij}^{k} = \overset{*}{\varepsilon}{}_{ji}^{n-k+1}$$

überdeckung U デハ

U: a_i^k ヲ überlagern スル xa_i^k ニ對シテ a_j^{k-1} ヲ überlagern スル $x'a_j^{k-1}$ が存在シテ

xa_i^k ト $\varepsilon_{ij}^k x\gamma_{ij}^k a_j^{k-1}$ トが inzideng ;

$$\begin{cases} x' = x\gamma_{ij}^k \\ \gamma_{ij} \text{ ハ } \mathfrak{R} \text{ ノ Automorphismus} \end{cases}$$

コノコトヲ $xa_i^k \to x'a_j^{k-1}$ デ示スト

U^*: $\mathcal{X}(xa_i^k) = \mathcal{X}(x)\cdot\mathcal{X}(a_i^k)$ $\qquad \mathcal{X}(x'a_j^{k-1}) = \overset{*}{x}{}' b_j^{n-k+1}$

$$= \overset{*}{x}\, b_i^{n-k}$$

$$\overset{*}{x}\, b_i^{n-k} \longleftarrow \overset{*}{x}{}'\, b_j^{n-k+1}$$

コヽニ $\overset{*}{x} = \overset{*}{x}{}' \overset{*}{\gamma}{}_{ji}^{n-k+1}$

$$\therefore \quad \mathcal{X}x = \mathcal{X}x' \overset{*}{\gamma}{}_{ji}^{n-k+1}$$

$$= \mathcal{X}x\, \gamma_{ij}^{k}\, \overset{*}{\gamma}{}_{ji}^{n-k+1}$$

故ニ überdeckung ノ Inzidenzmatrizen ノ U, U^* ニ於ケル關係ハ

$$\left(\gamma_{ij}^{k}\right) = \left(\overset{*}{\gamma}{}_{ji}^{n-k+1}\right)^{-1}$$

dual Operator $\mathcal{X}$ ヲ上ノ如リ考ヘル.

サテ §1, (1) ニヨリ K_n ニ關スル Kette f_n ニ對應セル K_m ノ Kette ヲ f_m トスレバ Gruppe $\mathfrak{a}$ ノ Element トシテ

$${}_m f\left({}_m a^k_{i_t}\right) = {}_n f\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)$$

ナル對應ガツケテアッタ。

Operator $\mathfrak{X}$ ニヨリ

$$\begin{array}{ccc} & & {}_m a^k_{i_1} \\ {}_n a^k_j & \longleftarrow & \vdots \\ & & {}_m a^k_{i_s} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & {}_m b^{n-k}_{i_1} = \mathfrak{X}\,{}_m a^k_{i_1} \\ \mathfrak{X}\,{}_n a^k_j = {}_n b^{n-k}_j & \longrightarrow & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & & {}_m b^{n-k}_{i_s} = \mathfrak{X}\,{}_m a^k_{i_s} \end{array}$$

$$\mathfrak{X}\left({}_m f^k\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right) = \mathfrak{X}\left({}_n f^k\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)\right) = \mathfrak{X}\left({}_n f^k\left({}_n a^k_j\right)\right)$$

$$t = 1, 2, \cdots\cdots s$$

i,e $\mathfrak{X}\,{}_m f^k\left(\mathfrak{X}\,{}_m a^k_{i_t}\right) = \mathfrak{X}\,{}_n f^k\left(\mathfrak{X}\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)\right) = \mathfrak{X}\,{}_n f^k\left(\mathfrak{X}\,{}_n a^k_j\right)$

$$\therefore\ {}_m\overset{*}{f}{}^{n-k}\left({}_m b^{n-k}_{i_t}\right) = {}_n\overset{*}{f}{}^{n-k}\left(\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)^*\right) = {}_n\overset{*}{f}{}^{n-k}\left({}_n b^{n-k}_j\right)$$

$$t = 1, \cdots\cdots s$$

即チ

$$(6) \qquad {}_m\overset{*}{f}{}^{n-k}\left({}_m b^{n-k}_{i_t}\right) = {}_n\overset{*}{f}{}^{n-k}\left(\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)^*\right)$$

$$t = 1, 2, \cdots\cdots s$$

故ニ $\overset{*}{K}_n$ ニ関スル Kette ${}_m\overset{*}{f}{}^{n-k}$ ニ對應セル $\overset{*}{K}_m$ ニ関シテノ Kette ヲ ${}_m\overset{*}{f}{}^{n-k}$ トスルトキ gruppe $\mathfrak{a}$ ノ Element シテ(6)ナル對應ガツイテキル。

THEOREM

(6)ナル對應ノ許ニ於テ Folge (5) ノ Limesgruppe ヲ $B_u^{n-k}(F, \mathfrak{a})$ トスレバ

$$B_0^k(F, \mathfrak{a}) \approx B_u^{n-k}(F, \mathfrak{a})$$

附記

念ノタメニ Lemma 2 ヲ証明シテオク。

即チ $B_0^k(K, \mathfrak{a}) \approx B_u^{n-k}(K^*, \mathfrak{a})$ ナルコト

証明

Überdeckung ノ Inzidenzmatrizen ノ Element デアル γ ニツイテハ u-Überdeckung ノ Element $\gamma_{ij}^k(a_i^k \to a_j^{k-1})$ ト o-Überdeckung ノ $\bar{\gamma}_{ji}^k\left(a_j^{k-1} \to a_i^k\right)$ トハ identisch ナリト假定シテオク。

f^k ヲ o-Zyklus トス。

$$g_0 f^k = f^{k+1}\left(a_j^{k+1}\right) = \sum_{a_j^{k+1} \to a_i^k} \varepsilon_{ji}^k \gamma_{ij}^{k+1} f^k(a_i^k) = 0$$

dual operator $\mathfrak{X}$ ヲホドコス。

$$\varkappa g_0 f^k = \varkappa f^{k+1}(\varkappa a_j^{k+1}) = \sum \varkappa \varepsilon_{ji}^k \varkappa \gamma_{ij}^{k+1} \varkappa f^k(\varkappa a_i^k) = 0$$

$$\therefore\ \overset{*}{f}{}^{n-k-1}(b_j^{n-k-1}) = \sum_{b_i^{n-k} \to b_j^{n-k-1}} \overset{*}{\varepsilon}{}_{ij}^{n-k} \overset{*}{\gamma}{}_{ij}^{n-k} \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k})$$

$$= g_u \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k}) = 0$$

故ニ 0-Zyklus f^k ニハ u-Zyklus $\overset{*}{f}{}^{n-k}$ ガ對應.

次ニ f^k ヲ 0-Rand トス. 即チ f^{k-1} ガ存在シテ

$$g_0 f^{k-1} = f^k$$

$$g_0 f^{k-1} = f^k(a_i^k) = \sum_{a_i^k \to a_j^{k-1}} \varepsilon_{ij}^{k-1} \gamma_{ji}^k f^{k-1}(a_j^{k-1})$$

$$\therefore\ \varkappa g_0 f^{k-1} = \varkappa f^k(\varkappa a_i^k)$$

$$= \sum \varkappa \varepsilon_{ij}^{k-1} \varkappa \gamma_{ji}^k \varkappa f^{k-1}(\varkappa a_j^{k-1})$$

$$\therefore\ \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k}) = \sum_{b_j^{n-k+1} \to b_i^{n-k}} \overset{*}{\varepsilon}{}_{ji}^{n-k+1} \overset{*}{\gamma}{}^{n-k+1} \overset{*}{f}{}^{n-k+1}(b_j^{n-k+1})$$

$$\therefore\ \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k}) = g_u \overset{*}{f}{}^{n-k+1}$$

即チ $\overset{*}{f}{}^{n-k+1}$ ノ存在ガ云ヘタ. 故ニ 0-Rand f^k ニハ u-Rand $\overset{*}{f}{}^{n-k}$ ガ對應.

以上ノ對應ガ Homomorphismus ナルコトハ明.

又 K, K^* ハ dual ナルコトカラ $B_0^k(K, \mathfrak{R})$ ハ $B_u^{n-k}(K^*, \mathfrak{R})$

ノ全体ト isomorph.